Correction DS n°2

Exercice 1 (4)

$$A_n = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \qquad C_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$$

$$A_n = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\boxed{A_n = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

(1)

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 - k$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$$

$$B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$B_n = n(n+1)\left[\frac{1}{6}(2n+1) - \frac{1}{2}\right]$$

$$B_n = n(n+1)\left(\frac{1}{3}n + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

$$B_n = n(n+1)\left(\frac{1}{3}n - \frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{B_n = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}} \quad (1)$$

$$C_n = (2+3)^n$$

$$\boxed{C_n = 5^n}$$

(1)

Exercice 2

$$f : x \longmapsto \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

A. Etude sur $]0;+\infty[$

1 (a) La fonction f est définie et dérivable sous la condition : $e^{2x} - 1 \neq 0$.

On résout alors l'équation

$$e^{2x} - 1 = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff 2x = 0 \iff \boxed{x = 0} \quad (1)$$

La fonction f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1 (b) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(e^{2x}-1) - 2e^{2x}(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{2e^{4x} - 2e^{2x} - 2e^{4x} - 2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \quad (1)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}$$

2 (a) $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1+1+1}{e^{2x}-1}$

$f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}-1} + \dfrac{2}{e^{2x}-1}$

$\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{2}{e^{2x}-1}}$ 1

Rq: On peut égalem partir de l'expressio de l'énoncée et mettre au même dénominateur.

2 (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^{2x}-1} = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}$.

1

2 (c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{2x} = 1^+$ d'ou $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{2x} - 1 = 0^+$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{2}{e^{2x}-1} = +\infty$

et donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty}$

1

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \dfrac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \leq 0$

Donc

x	0	$-\infty$
variations de f	$+\infty$ ↘	1

1

Au vu du tableau de variation, $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) > 1$

Donc f est de signe <u>positif</u> sur $]0;+\infty[$

1

4(a) La fonction g est définie sous la condition

$$e^{2x}-1>0 \quad \text{(car la fonction ln est définie sur } \mathbb{R}_+^* \text{)}$$

$$\iff e^{2x}>1 \quad \text{fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\iff 2x>0$$

$$\iff x>0$$

La fonction g est donc $\boxed{\text{définie sur }]0;+\infty[.}$ (1)

g est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-1$$

$$g'(x)=\frac{2e^{2x}-(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=f(x)} \quad (1)$$

4b) D'après la question 4(a) g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$ (1)

4c) On sait que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g'(x)=f(x)>0$ (question 3)

donc g est strictement croissante

De plus, on a vu (question 2c) que $\lim\limits_{x \to 0^{>}} e^{2x}-1=0^+$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^{>}} \ln(e^{2x}-1)=-\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^{>}} -x=0$

et $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^{>}} g(x)=-\infty}$ (1)

Exercice 2 (suite)

4(d) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \ln\left(e^{2x}\left(1 - e^{-2x}\right)\right) - x$

$$g(x) = \ln(e^{2x}) + \ln(1 - e^{-2x}) - x$$

$$g(x) = 2x + \ln(1 - e^{-2x}) - x$$

$$g(x) = x + \ln(1 - e^{-2x})$$ 1

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-2x}) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 - e^{-2x}) = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$$ 1

4(e) : La fonction g est : - strictement croissante sur $]0; +\infty[$

- continue sur $]0; +\infty[$ comme composée et somme de fonctions continues.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$

donc il existe x_0, x_1 tels que $0 < x_0 < x_1$

$g(x_0) < 0$ et $g(x_1) > 0$

Par le théorème des valeurs intermédiaires (ou de la bijection)

On conclut

$$\boxed{\exists!\ x \in]0; +\infty[\ \backslash \ g(x) = 0}$$ 2

B. Construction de $\mathcal{C}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) + f(-x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} + \dfrac{e^{-2x} + 1}{e^{-2x} - 1}$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}}(1 + e^{-2x})}{\cancel{e^{2x}}(1 - e^{-2x})} + \frac{e^{-2x} + 1}{e^{-2x} - 1}$$

$$= \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} + \left(- \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}\right)$$

$$\boxed{f(x) + f(-x) = 0}$$ 1

Suite du B 1) [On pouvait faire cette question même si on n'avait pas réussi les calculs précédents).

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ -x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -f(x)$

La fonction f est donc impaire et $\mathcal{C}$ admet une symétrie centrale de centre O

1 impaire + symétrie

2) $f(\ln(3)) = \dfrac{e^{2\ln(3)}+1}{e^{2\ln(3)}-1} = \dfrac{9+1}{9-1} = \boxed{\dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}}$ 1

$f'(\ln(3)) = \dfrac{-4\times e^{2\ln 3}}{(e^{2\ln(3)}-1)^2} = \dfrac{-4\times 9}{8^2} = \boxed{\dfrac{-9}{\cancel{16}\ 32}}$

La tangente en $x = \ln(3)$ est donné par la formule

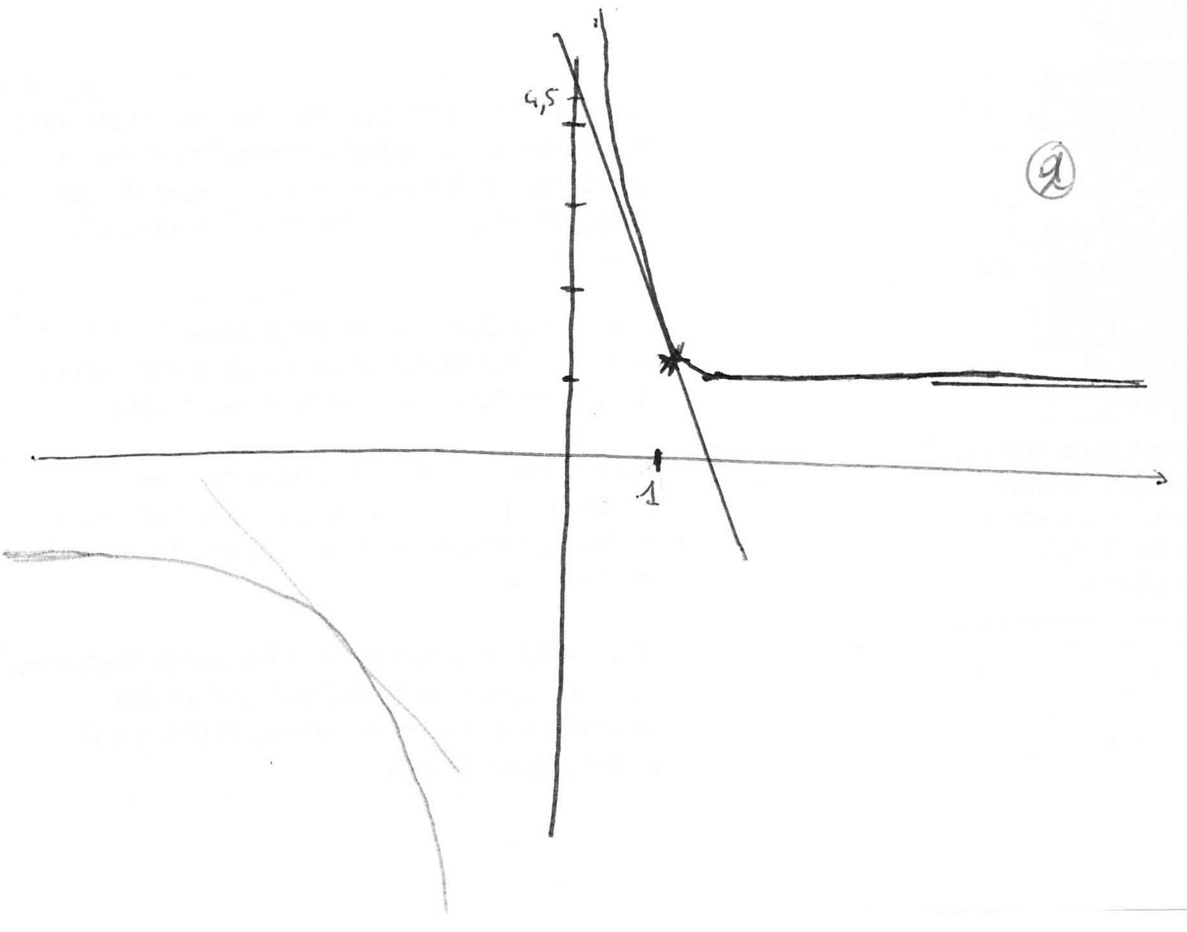
$$y = f'(\ln(3))(x-\ln(3)) + f(\ln(3))$$

$$y = -\frac{9}{\cancel{16}\ 32}(x-\ln(3)) + \frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{9}{\cancel{16}\ 32}x + \left(\frac{9}{\cancel{16}\ 32}\ln(3) + \frac{5}{4}\right)$$ 1

$$y \simeq -0{,}3x + 1{,}1\times 0{,}3 + 1{,}2$$

$$\boxed{y \simeq -0{,}3x + \cancel{1}\,4{,}5}$$



2

Exercice 3 (9)

	$A=\{0;1;2\}$	$A=]-\infty;2]\cap\mathbb{Z}$	$A=[2;+\infty[\cup\mathbb{Z}$
$\forall x\in A, \exists y\in\mathbb{N}, x<y$	Vrai	Vrai	Vrai
$\exists x\in A, \forall y\in\mathbb{N}, x\geq y$	Faux	Faux	Faux
$\exists x\in\mathbb{N}, \forall y\in A\ y<x$	Vrai	Vrai	Faux

Exercice 4

1) On suppose $n=0$ (1)

$\sqrt{n^2+1} = \sqrt{0^2+1} = \sqrt{1} = 1$ et 1 est un entier.

2)(a) Contraposée : $a\neq 1$ ou $b\neq 1 \Rightarrow ab\neq 1$.

Négation : $ab=1$ et $(a\neq 1$ ou $b\neq 1)$. (1)

(b) Soit $a\in\mathbb{N}$, $a\neq 1$ et $a\times b=1$ ($a\neq 1$ et $\neq 0$) (1)

donc $b=\frac{1}{a}\notin\mathbb{N}$.

(c) On suppose que $a,b\in\mathbb{N}$, que $ab=1$ et $(a\neq 1$ ou $b\neq 1)$

1er cas : $a\neq 1$ alors $b\notin\mathbb{N}$ $\to$ absurde (1)

2ème cas : $b\neq 1$ alors $a\notin\mathbb{N}$ $\to$ absurde.

Dans tous les cas la négation de la proposition est absurde

Par conséquent, $ab=1 \Rightarrow a=1$ et $b=1$.

3) (a) $\sqrt{n^2+1} = p$

$\Leftrightarrow n^2+1 = p^2$

$\Leftrightarrow 1 = p^2-n^2$

$\Leftrightarrow \boxed{(p-n)(p+n)=1}$ (1)

3(b) D'après la question 2

$$(p-n)(p+n) = 1 \Rightarrow \begin{cases} p-n = 1 \\ p+n = 1 \end{cases} \quad ①$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p = 2 & (L_1 + L_2) \\ 2n = 0 & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ n = 0 \end{cases} \quad ①$$

$$\boxed{\text{Donc } \sqrt{n^2+1} \Rightarrow n = 0}$$

Exercice 5

A-(1)(a) : f est bien définie sous la condition

$$\frac{1+x}{2} \geq 0$$

$$1 + x \geq 0$$

$$\boxed{x \geq -1}$$

Donc $\boxed{D_f = [-1 ; +\infty[}$ ①

(b) La fonction f est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ (la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$).

$$\forall x \in]-1 ; +\infty[, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} = \frac{1}{\frac{4\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1+x}} > 0 \quad \underline{\forall x > -1} \quad ①$$

Donc f <u>est strictement croissante</u> ①

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x}{2} = +\infty \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1+x}{2}} = +\infty}$$

①

6) On résout

$$\sqrt{\frac{1+x}{2}} = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{2} = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \frac{1}{4} - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta = \frac{1}{4} + 2$$

$$\Delta = \frac{9}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{+\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1}$$ 1

mais

$$\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}.$$

$$\sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1$$

Donc $S = \{1\}$ 1

On résout

$$f(x) > x.$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x > 0$$

On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est dérivable entant que somme de fonctions dérivables sur $]-1;+\infty[$ 1.

$$\forall x \in]-1;+\infty[\quad g'(x) = f'(x) - 1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1+x}} - \frac{4\sqrt{1+x}}{4\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 4\sqrt{1+x}}{4\sqrt{1+x}}$$ 1

On résout $\sqrt{2} - 4\sqrt{1+x} > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} > 4\sqrt{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} > \sqrt{1+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{16} > 1 + x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{8} - 1 > x$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{-\frac{7}{8} > x} \qquad 1$$

Donc $g'(x) > 0$ pour $x \in \left]-1 ; -\frac{7}{8}\right[$

et $g'(x) < 0$ pour $x \in \left]-\frac{7}{8} ; +\infty\right[$.

Le point $x = -\frac{7}{8}$ est un maximum pour la fonction g et

$$g\left(-\frac{7}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{8}}{2}} - \left(-\frac{7}{8}\right)$$ (inutile car positif.

x	-1		$-7/8$		1		$+\infty$
variat° de g	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1

Or $g(-1) = 0$

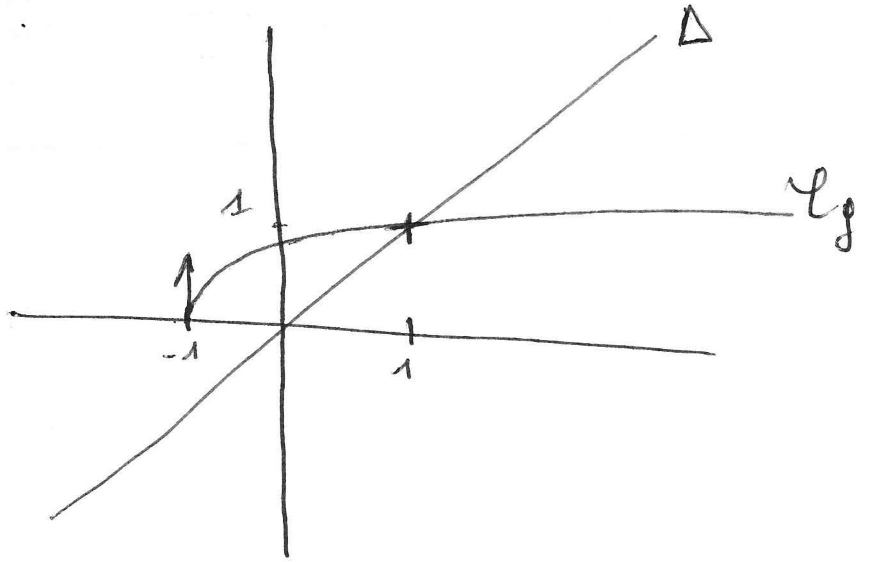
et $g(1) = f(1) - 1 = 0$ (question précédente).

D'après le tableau de variation :

$\forall x \in]-1 ; 1]$ $\quad f(x) \geq x$ $\qquad$ 1

$\forall x \in [1 ; +\infty[$ $\quad f(x) \leq x$

d)



1

2 a) On note $P_n : \{u_n$ est bien définie et $u_n \geq 0\}$.

<u>Initialisation</u> P_0 s'écrit $u_0 \geq 0$. or $u_0 = 0$

donc P_0 est vraie.

<u>Hérédité</u> : On suppose que la proposition P_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$.

$u_n \geq 0$ donc $\frac{1+u_n}{2} \geq 0$ et donc

u_{n+1} est bien définie.

de plus $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \geq 0$

P_{n+1} est vraie donc (P_n) est héréditaire.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien définie et } u_n \geq 0}$$

2b) On montre la proposition $R_n = \{1 \geq u_{n+1} \geq u_n\}$.

<u>Initialisation</u>

R_1 s'écrit $1 \geq u_1 \geq u_0$ or $u_0 = 0$

et $u_1 = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

et $1 \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \geq 0$

Donc R_1 est vraie.

<u>Hérédité</u> : On suppose que la proposition R_n est vraie pour un certain $n \geq 0$.

On cherche à montrer $R_{n+1} : \{1 \geq u_{n+2} \geq u_{n+1}\}$

$$u_{n+2} = \sqrt{\frac{1+u_{n+1}}{2}}$$

Or $1 \geq u_{n+1} \geq u_n$.

$\Rightarrow 2 \geq 1+u_{n+1} \geq 1+u_n$

$\Rightarrow 1 \geq \frac{1+u_{n+1}}{2} \geq \frac{1+u_n}{2}$

$\Rightarrow 1 \geq \sqrt{\frac{1+u_{n+1}}{2}} \geq \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

$\Rightarrow 1 \geq u_{n+2} \geq u_{n+1}$

1

1

1

rédaction 1

1

Rédaction 1

1

Donc la proposition $\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

$(\mathcal{R}_n)$ est héréditaire.

On en déduit que la suite u est croissante et majorée par 1.

3(a) $\mathcal{Q}_n : \{u_n$ est bien définie et $u_n \geq 1\}$. (1)

(I) $\mathcal{Q}_0$ s'écrit u_0 existe et $u_0 \geq 1$ Vrai

(H) On suppose que $\mathcal{Q}_n$ est vrai pour un certain rang $n \geq 0$

$$u_n \geq 1$$

$$\frac{1+u_n}{2} \geq \frac{2}{2} \geq 1$$ (1)

donc $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ est bien définie

et $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \geq \sqrt{1}$

$$u_{n+1} \geq 1$$ (1)

Donc $(\mathcal{Q}_n)$ est héréditaire

Redact. (1)

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 1$.

3(b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq 1$.

On a $f(u_n) \leq u_n$. (1)

$$\boxed{u_{n+1} \leq u_n}$$

Donc (u_n) est décroissante.

B| 1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(a) Pour tout x réel, les fonctions ch et sh sont dérivables en tant que somme de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R}$, $ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad sh'(x) = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2}$

$\boxed{ch'(x) = sh(x)}$ $\qquad \boxed{sh'(x) = ch(x)}$ 1

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^x}{2} > 0$ et $\dfrac{e^{-x}}{2} > 0$

donc $\boxed{ch(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$ 1

La fonction ch est positive donc sh est strictement croissante $(sh'(x) = ch(x) > 0)$

et $sh(0) = \dfrac{e^0 - e^{-0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$

Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de sh		↗	0	↗	
Signe de sh		$-$	0	$+$	
variations de ch		↘	1	↗	$+\infty$

1

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$

Sur $]0 ; +\infty[$, la fonction ch est

- strictement croissante
- continue
- De plus $ch(0) = 1 < u_0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty$ 2

Donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $\alpha \in]0 ; +\infty[$ \ $f(\alpha) = 0$

2(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ 2ch\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 - 1$

$= 2\left(\frac{e^{2\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}}e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{-2x}{2}}}{4}\right) - 1$ (1)

$= \frac{e^{x}}{2} + 1 + \frac{e^{-x}}{2} - 1$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad 2ch\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$ (1).

2(b) Premièrement, $u_0 = ch\left(\frac{\alpha}{2^0}\right) = ch(\alpha) = u_0$ (1) + justi. (d'après la question 1(c).)

$u_{n+1} = ch\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)$

On a donc $2u_{n+1}^2 - 1 = 2 \times ch\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)^2 - 1$

$= 2\, ch\left(\frac{\alpha/2^{n}}{2}\right)^2 - 1$ (1)

$= ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ d'après question 2(a) (1)

donc $2u_{n+1}^2 - 1 = u_n$

$\Longleftrightarrow 2u_{n+1}^2 = u_n + 1$

$\Longleftrightarrow u_{n+1}^2 = \frac{u_n + 1}{2}$

$\Longleftrightarrow u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}$ (1)

Exercice 6

Partie 1

4

1. **Variable** v : réel
n : entier

Initialisation : demandez n
$v = 0$

Traitement pour k allant de 1 à n
$$v = v + \frac{1}{k}$$

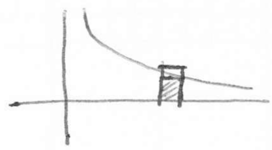
Sortie afficher v

Scilab :

```
n = input("Entrez un entier")
v = 0
for k = 1:n
    v = v + 1/k
end
disp(v)
```

2. Par la méthode des rectangles, comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante,

$\forall k > 1$, $$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}$$



$$\frac{1}{k} \leq \left[\ln(x)\right]_{k-1}^{k}$$

2

$$\boxed{\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)}$$

3. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$$ 1

On reconnait à droite une somme télescopique. 1
Donc
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) - \ln(1)$$
$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$$
$$\boxed{v_n \leq \ln(n) + 1}$$ 1

Partie 2

1(a) $\mathcal{P}_n : \{ u_n \text{ est défini et } u_n > 0 \}$.

Initialisation

$\mathcal{P}_0$ s'écrit u_0 est défini et $u_0 > 0$

Or $u_0 = 1 > 0$ Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. (1)

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang $n \geq 0$

On sait donc que u_n existe et $u_n > 0$

donc $\frac{1}{u_n} > 0$ et $u_n > 0$ (1)

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ existe

et $u_{n+1} > 0$

Par conséquent $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire

Redaction (1) +b

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2-(a) $u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2$

$u_{k+1}^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2u_k \times \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2$

$$\boxed{u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}}$$ (1)

(b) On prend la somme dans la dernière égalité.

$\sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ (1)

$u_n^2 - u_0^2 = 2\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

$u_n^2 - 1 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ (1)

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_n^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}}$

(c) $\forall k \in [\![0;n-1]\!]$, $\frac{1}{u_k^2} > 0$

donc $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} > 0$ 1

$\Rightarrow 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2} > 2n+1$

$\Rightarrow \boxed{u_n^2 > 2n+1}$ 1

3(a) D'après la question précédente,

$\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad u_k^2 > 2k+1 > 2k$

$\forall k \in [\![1;n-1]\!] \quad \frac{1}{u_k^2} < \frac{1}{2k}$ 1

Pour $n \geq 2$ $\quad u_n^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}$

$\Rightarrow u_n^2 \leq 2n+1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u_k^2}+\frac{1}{u_0^2}$ 1

$\Rightarrow u_n^2 \leq 2n+1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}+1$

$\Rightarrow u_n^2 \leq 2n+2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

$\Rightarrow \boxed{u_n^2 \leq 2n+2+\frac{1}{2}v_{n-1}}$ 1

3(b) D'après la Partie 1, question 2

$v_{n-1} \leq \ln(n-1)+1$

et $u_n^2 \leq 2n+2+\frac{1}{2}v_{n-1}$ (question 3(a))

$u_n^2 \leq 2n+2+\frac{1}{2}\left(\ln(n-1)+1\right)$

$u_n^2 \leq 2n+2+\frac{1}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$

$\boxed{u_n^2 \leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}}$ 1